DURÉE : 4 heures

Rappel :

Soit φ une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

On dit que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$$

converge si et seulement si

$$\int_{a}^{b} \varphi(t)\,dt$$

a une limite finie lorsque $b \to +\infty$ et $a \to -\infty$.

Dans ce cas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_{a}^{b} \varphi(t)\,dt \ .$$

NOTATIONS.

On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f continues, d'une variable réelle, à valeurs réelles *positives* telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$

converge *et soit égale à 1.*

A toute fonction f de $\mathcal{F}$ on associe la fonction F dite fonction intégrale de f définie par

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx \ .$$

PARTIE I

On suppose que $f \in \mathcal{F}$; F est la fonction intégrale associée à f.

1° Montrer que $F(t)$ existe pour tout $t \in \mathbf{R}$. Étudier la continuité de F.

2° Montrer que F est croissante et que $\lim_{x \to -\infty} F(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ existent. Quelles sont les valeurs de ces limites ?

3° Montrer que F est dérivable. Calculer la dérivée de F.

PARTIE II

1° La fonction f appartient à $\mathcal{F}$; α est un réel strictement positif.

a. Montrer que pour tout $b \geqslant 0$:

$$\int_0^b x^\alpha f(x)\,dx = -b^\alpha [1 - F(b)] + \alpha \int_0^b x^{\alpha-1} \{1 - F(x)\}\,dx \ .$$

b. Montrer que si

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx$$

converge, alors $b^\alpha[1 - F(b)] \to 0$ quand $b \to +\infty$: on s'intéressera à l'intégrale

$$\int_b^\infty x^\alpha f(x)\,dx \ .$$

c. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\int_0^b x^{\alpha-1} \{1 - F(x)\}\,dx \geqslant K \int_0^b x^\alpha f(x)\,dx \qquad \forall b \geqslant 0 \ .$$

d. Déduire de ce qui précède que si l'une des deux intégrales

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \alpha \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\,(1 - \mathrm{F}(x))\,dx$$

converge, l'autre converge aussi, et que, dans ce cas, les deux intégrales sont égales.

e. Montrer que si l'une des intégrales

$$\int_{-\infty}^{0} |x|^{\alpha} f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\,\mathrm{F}(-x)\,dx$$

converge, l'autre converge aussi et lui est égale.

f. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} f(x)\,dx$$

converge si et seulement si

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\{1 - \mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(-x)\}\,dx$$

converge.

2° Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{F}$, F et G les fonctions intégrales associées.

On associe à f et g la fonction H définie par

$$\mathrm{H}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}(t - x)\,g(x)\,dx\ .$$

a. Montrer que l'intégrale définissant H est convergente pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Montrer que $\mathrm{H}(t) \leqslant 1$ et que H est croissante.

b. Montrer que $\lim_{t \to +\infty} \mathrm{H}(t)$ existe et est inférieure ou égale à 1 et que $\lim_{t \to -\infty} \mathrm{H}(t)$ existe et est positive ou nulle.

c. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite numérique définie par

$$u_n = \int_{-n}^{+n} \mathrm{F}(2n - x)\,g(x)\,dx$$

Montrer que $u_n \to 1$ quand $n \to \infty$. [On montrera que u_n est majorée par 1, puis que $u_n \geqslant v_n$ où $v_n \to 1$ quand $n \to +\infty$ en utilisant la croissance de F.]

On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lim_{t \to +\infty} \mathrm{H}(t) = 1 - \varepsilon$.

Montrer que sous cette hypothèse, la suite u_n est bornée par $1 - \varepsilon$.

En déduire que $\lim_{t \to +\infty} \mathrm{H}(t) = 1$.

d. Soit $(v_n)_{n \geqslant 0}$ la suite numérique de terme général

$$v_n = \int_{-n}^{+n} [1 - \mathrm{F}(-2n - x)]\,g(x)\,dx\ .$$

Montrer que $v_n \to 1$ quand $n \to +\infty$.

En déduire, par un raisonnement analogue au précédent que $\lim_{t \to -\infty} \mathrm{H}(t) = 0$.

e. Établir l'égalité :

$$\mathrm{H}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{G}(t - x)\,f(x)\,dx\ .$$

3° La fonction H est définie comme en 2°.

On suppose que *f est bornée.*

a. Soit Φ la fonction de deux variables :

$$\Phi(x, t) = \mathrm{F}(t - x)\,g(x)$$

Étudier la continuité dans $\mathbf{R}^2$ et la dérivabilité par rapport à x de la fonction Φ. Montrer que la dérivée partielle de Φ par rapport à x est continue dans $\mathbf{R}^2$.

b. On introduit la suite $[u_n(t)]_{n \geqslant 0}$ où :

$$u_n(t) = \int_{-n}^{+n} \mathrm{F}(t - x)\,g(x)\,dx\ .$$

Montrer la convergence simple de la suite $u_n(t)$.

Montrer que la fonction u_n est dérivable sur $\mathbf{R}$. Quelle est sa dérivée ?

Montrer la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbf{R}$ de la suite $u'_n(t)$.

c. En déduire que H est dérivable et montrer que :

$$H'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - x)\, g(x)\, dx .$$

On pose $h(t) = H'(t)$. Montrer que $h \in \mathcal{F}$.

4° On conserve les mêmes notations que dans 2°.

On suppose $F(0) = G(0) = \frac{1}{2}$.

a. Montrer que $H(t) \geqslant \frac{F(t)}{2}$.

[On écrira l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t - x) f(x)\, dx$$

comme somme de deux intégrales et on utilisera, après l'avoir démontré :

$$G(u) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad u \geqslant 0 .]$$

b. Montrer que $H(t) \leqslant \frac{1}{2}[1 + F(t)]$.

[On décomposera à nouveau

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t - x) f(x)\, dx$$

en deux intégrales et on utilisera, après l'avoir démontré :

$$G(u) \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad u \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \int_{t}^{\infty} f(u)\, du = 1 - F(t) .]$$

c. En déduire que :

$$1 - H(t) + H(-t) \geqslant \frac{1}{2}\{1 - F(t) + F(-t)\}$$

et que :

$$1 - H(t) + H(-t) \geqslant \frac{1}{2}\{1 - G(t) + G(-t)\}$$

d. On suppose que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} h(x)\, dx$ converge.

Montrer, en utilisant la partie II, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} f(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} g(x)\, dx$$

convergent.

e. Démontrer *d.* lorsque la condition $F(0) = G(0) = \frac{1}{2}$ n'est pas réalisée.

5° On utilise les notations de 3°. On suppose que f est bornée, donc que H est dérivable.

Montrer que si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} f(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} g(x)\, dx$$

convergent, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} h(x)\, dx$$

converge.

On utilisera $|x + y|^{\alpha} \leqslant 2^{\alpha}(|x|^{\alpha} + |y|^{\alpha})$ que l'on démontrera en remarquant que $|x + y| \leqslant 2 \sup\{|x|, |y|\}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail